Exercice 1

1) Signe de $-4x+3$: $-4x+3 \geqslant 0$ lorsque $-4x \geqslant -3$

$x \leqslant \frac{-3}{-4}$

$x \leqslant \frac{3}{4}$

Signe de $5x+1$: $5x+1 \geqslant 0$ lorsque $5x \geqslant -1$

$x \geqslant -\frac{1}{5}$

2a) Tableau de signes de $(-4x+3)\times(5x+1)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-4x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-4x+3)\times(5x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2b) D'après 2a), $(-4x+3)\times(5x+1) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{5}$ ou $x \geqslant \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$

3a) Tableau de signes de $\frac{-4x+3}{5x+1}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-4x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-4x+3}{5x+1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

3b) D'après 3a), $\frac{-4x+3}{5x+1} > 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{5} ; \frac{3}{4}\right[$.

Exercice 2

1) $(5x+7)\times x = (5x+7)\times(3x+1)$

si et seulement si

$$(5x+7)\times x - (5x+7)\times(3x+1) = 0$$
$$(5x+7)\times\left[x - (3x+1)\right] = 0$$
$$(5x+7)\times(x-3x-1) = 0$$
$$(5x+7)\times(-2x-1) = 0$$
$$5x+7=0 \quad \text{ou} \quad -2x-1=0$$
$$5x=-7 \quad \text{ou} \quad -2x=1$$
$$x=-\frac{7}{5} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{2}$$
$$x\in\left\{-\frac{7}{5}\,;\,-\frac{1}{2}\right\}.$$

2) $(4x+6)^2 = (9x-5)^2$

équivaut à $(4x+6)^2-(9x-5)^2=0$

$$\left[(4x+6)-(9x-5)\right]\times\left[(4x+6)+(9x-5)\right]=0$$
$$\left[4x+6-9x+5\right]\times\left[4x+6+9x-5\right]=0$$
$$(-5x+11)\times(13x+1)=0$$
$$-5x+11=0 \quad \text{ou} \quad 13x+1=0$$
$$-5x=-11 \quad \text{ou} \quad 13x=-1$$
$$x=\frac{11}{5} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{13}$$
$$x\in\left\{-\frac{1}{13}\,;\,\frac{11}{5}\right\}$$

3) $(3x-2)^2 = 3x(3x+2)$

$\iff (3x-2)^2 - 3x(3x+2) = 0$

$\iff \left[(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2\right] - \left[3x \times 3x + 3x \times 2\right] = 0$

$\iff \left[9x^2 - 12x + 4\right] - \left[9x^2 + 6x\right] = 0$

$\iff (\cancel{9x^2} - 12x + 4 - \cancel{9x^2} - 6x = 0$

$\iff -18x + 4 = 0$

$\iff -18x = -4$

$\iff x = \dfrac{-4}{-18}$

$\iff x = \dfrac{2}{9}$

$\iff x \in \left\{\dfrac{2}{9}\right\}$.

Exercice 3

1) $(6x-8)\times(-2x+9) < (6x-8)\times(x+7)$

$\iff (6x-8)\times(-2x+9) - (6x-8)\times(x+7) < 0$

$\iff (6x-8)\times[(-2x+9) - (x+7)] < 0$

$\iff (6x-8)\times(-2x+9-x-7) < 0$

$\iff (6x-8)\times(-3x+2) < 0.$

2) • $6x-8 \geqslant 0$ lorsque $6x \geqslant 8$; $x \geqslant \frac{8}{6}$; $x \geqslant \frac{4}{3}$

• $-3x+2 \geqslant 0$ lorsque $-3x \geqslant -2$; $x \leqslant \frac{-2}{-3}$; $x \leqslant \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$6x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(6x-8)\times(-3x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par suite, l'ensemble des solutions de l'inéquation

$(6x-8)\times(-2x+9) < (6x-8)\times(x+7)$ est

$]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{4}{3}; +\infty[.$

Exercice 4

1) Puisque $E \in [AB]$ et $E \neq A$, $E \neq B$, on a

$$0 < BE < AB$$

Or $BE = BD + DE = x + x = 2x$ et $AB = 10$.

Ainsi $0 < 2x < 10$

$$0 < x < 5$$

2) * Avec le théorème de Thalès,

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

soit $\frac{x}{10} = \frac{BF}{BC} = \frac{DF}{5}$

En particulier $\frac{DF}{5} = \frac{x}{10}$;

$$DF = 5 \times \frac{x}{10}$$

$$DF = \frac{x}{2}.$$

* Avec le théorème de Thalès,

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC} = \frac{EH}{AC}$$

soit $\frac{2x}{10} = \frac{BH}{BC} = \frac{EH}{5}$.

En particulier $\frac{EH}{5} = \frac{2x}{10}$;

$$EH = 5 \times \frac{2x}{10} ;$$

$$EH = x$$

3) L'aire du rectangle EDFG est :

$$\mathcal{A}_{EDFG} = ED \times DF = x \times \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

L'aire du rectangle AEHI est :

$$\mathcal{A}_{AEHI} = AE \times EH = (10-2x) \times x$$

Par suite $\mathcal{A}_{EDFG} > \mathcal{A}_{AEHI}$

si et seulement si

$$\frac{x^2}{2} > (10-2x) \times x$$

$$2 \times \frac{x^2}{2} > 2 \times (10-2x) \times x$$

$$x^2 > 2(10-2x) \times x$$

$$x^2 - 2(10-2x) \times x > 0$$

$$x\left[x - 2(10-2x)\right] > 0$$

$$x \times \left[x - 20 + 4x\right] > 0$$

$$x \times (5x - 20) > 0$$

$$5x - 20 > 0 \qquad (\text{car } x > 0)$$

$$5x > 20$$

$$x > \frac{20}{5}$$

$$x > 4$$

$$BD > 4$$